数理解析研究所講究録
674巻 1988年 38-58

Hyperfinite II_1 factor 上の shift.

甲子園大 経営情報 榎本雅俊

§0. Introduction. V. Jones は，彼の有名な指数理論を[8]で始めた．A. Ocneanu [9]は，Hyperfinite II_1 factor の中の subfactors の埋め込みの分類問題を，相対可換子代数を用いることで，展開している．他方，R. T. Powers [10]は，この Jones index を使って，Hyperfinite II_1 factor 上のある $*$-endomorphism を研究した．彼は，Hyperfinite II_1 factor R の $*$endomorphism σ で，単位元 I を保存し，$\bigcap_{k=1}^{\infty}\sigma^k(R)=\mathbb{C}I$ となるものを，shift と呼んで，σ の index を，Jones index $[R:\sigma(R)]$ により定義した．幾人かの人達（[1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [10], [11], [12]）により，Hyperfinite II_1 factor 上の shift が研究されている．R の shift σ が，Powers binary shift であるというのは，$\exists$ self adjoint unitary $u_0\in R$ で，$R=\{\sigma^n(u_0)\,;\,n=0,1,2,\cdots\}''$ で，$\sigma^n(u_0)$ と $\sigma^m(u_0)$ が，pairwise に可換か反可換となるようなものが存在するときをいう．その unitary u_0 を R の σ-generator ([10]) という．以下では，$u_n=\sigma^n(u_0)$ と置く．R 上の shift α,β が 共役であるというのを，

$\exists$automorphism θ on R で，$\beta=\theta\alpha\theta^{-1}$ となるときとする．

R上の shift α,β が，外部共役 であるとは，$\exists$ unitary $u\in R$，$\exists$automorphism θ on R で，$\beta=\theta\alpha\theta^{-1}\cdot \mathrm{Ad}u$ となるときとする．

Powers [10] は，共役なものを除いて，binary shift を完全に分類した．彼は又，次の外部共役不変量 $g(\sigma)$ を，shift σ に対して導入した．

$$\underline{g(\sigma)=\min\{k\in\mathbb{N}\ ;\ \sigma^k(R)'\cap R\neq\mathbb{C}I\}}.$$

このとき，Powers は，binary shift σ に対して，$g(\sigma)$ が，完全な外部共役不変量か？ という問題を提出した。これは，[4] に於いて，否定的に，解決された。このことを，行なう為に，我々は，相対可換子代数全体 $\{\sigma^k(R)'\cap R\ ;\ k=0,1,2,\cdots\}$ を使った。この使用に際しては，Ocneanu の idea に動機づけを与えられた点が大きい．

ここでは，binary shift に付随した相対可換子代数の構造を完全に決定することを目標とする。このとき，次の興味ある事実が成立することがわかる．

(1) すべての AF代数が，binary shift の相対可換子代数として実現される訳ではない．

(2) 相対可換子代数は，"finite depth"([9]) をもつ．

(3) 相対可換子代数の Bratteli diagram の inclusion 行列は，周期をもつ．

(4) 相対可換子代数は, $M_{2^p}(\mathbb{C})\otimes\mathbb{C}^{2^q}$ $(\exists p,q\geq 0)$
の形をもつ.

他方, Bures and Yin [2] は, 独立に, 次の美しい結果を得ている. (これは, Yinに知らせた我々のプレプリント[5]の中の予想に対する返事になっている.)

<u>定理([2])</u>. a, b を signature sequence とする. (i.e. $a:\mathbb{Z}\to\{0,1\}$ で, $a(0)=0$, $a(-n)=a(n)$ for $\forall n\in\mathbb{Z}$ なるものとする.) 又, $\max\{n; a(n)\neq 0\}<+\infty$, $\max\{n; b(n)\neq 0\}<+\infty$ とする. σ_a,σ_b を, a, b に対応する binary shift (後の, §1 参照) とする.
このとき, σ_a,σ_b が共役である

$\iff$ σ_a,σ_b が外部共役である。

このBuresとYinの結果と, 我々の得た結果を合わせることにより, <u>2つの binary shift で, 外部共役ではあるが, その相対可換子代数がすべて同型であるものが存在する</u>。

§1. 相対可換子代数.

Powers の binary shift は, 次のように実現される [4]. G を, $G_i(\cong \mathbb{Z}_2=\{0,1\})$ の制限直積 $G=\coprod_{i=0}^{\infty} G_i$ とする. $a:\mathbb{Z}\to\{0,1\}$ が, <u>signature sequence</u> とは, $a(0)=0$, $a(n)=a(-n)$ for $\forall n\in\mathbb{Z}$

なるものとする。G 上の canonical shift を，$x=(x(i))\in G$ に対して，$(\sigma(x))(i)=x(i-1)$ for $i\geqq 1$ and $(\sigma(x))(0)=0$ とする。G 上の <u>multiplier</u> m とは，$m: G\times G \longrightarrow \mathbb{T}=\{z\in\mathbb{C};\ |z|=1\}$ で，$m(x,1)=m(1,x)=1$，$m(x,y)m(xy,z)=m(x,yz)\cdot m(y,z)$ for $x,y,z\in G$ を満たすものをいう。signature sequence a を用いて，G 上の multiplier m_a を次で定義する。$x=(x(i))$，$y=(y(i))\in G$ に対して，

$$\underline{m_a(x,y)=(-1)^{\sum_{i>j} a(i-j)x(i)y(j)}}$$

この multiplier m_a を用いて，$\ell^2(G)$ 上の unitary operator $\lambda_{m_a}(x)$ を，$x,y\in G$，$\xi\in\ell^2(G)$ として，

$$(\lambda_{m_a}(x)\xi)(y)=m_a(x,x^{-1}y)\xi(x^{-1}y)$$ と定義する。

$R_{m_a}(G)$ により，$\{\lambda_{m_a}(x);\ x\in G\}$ により生成された von Neumann 代数とする。signature sequence a が <u>periodic</u> というのは，$\exists k\in\mathbb{Z}$ で，$a(k+n)=a(n)$ for $n\in\mathbb{Z}$ なることをいう。Price ([11],[12]) は，a が，not periodic $\Longleftrightarrow$ $R_{m_a}(G)$ が factor，を示している。以下，$e_i\in G$ を，$e_i(i)=1$，$e_i(j)=0$ $(i\neq j)$ とする。$R_{m_a}(G)$ 上には，G 上の canonical shift σ により，induce された shift σ_{m_a} が，存在して，$\sigma_{m_a}(\lambda_{m_a}(x))=\lambda_{m_a}(\sigma(x))$ $(x\in G)$ をみたす。σ_{m_a} を，σ_a と書く。$u_0=\lambda_{m_a}(e_0)$，$u_n=\sigma_a^{\,n}(u_0)$ と置く。このとき，

σより induceされた $R_{m_a}(G)=\{u_n ; n=0,1,\cdots\}''$ 上の shift σ_a は，Powersの binary shift である．[4]に於いて，我々は，σの相対可換子代数 $\sigma^k(R)'\cap R$（これを，$C_k(\sigma)$ と書く）を，次のように，σ-generatorの言葉で書いた．

定理（[4]）． aを non-periodic な signature sequence とする．$\#\{i\in\mathbb{Z}\mid a(i)\neq 0\}<+\infty$ を仮定する．$d=\max\{i\in\mathbb{Z}\mid a(i)\neq 0\}$ と置く．この signature sequence a をもつ binary shift を σ_a と書く．このとき，

$C_k(\sigma_a)=\mathbb{C}I \ (0\leqq k\leqq d)$，$C_k(\sigma_a)=\{u_i\mid 0\leqq i\leqq k-d-1\}''$ $(d+1\leqq k)$.

以下，unitaries $\{u_i\mid 0\leqq i\leqq n\}$ により生成される C^*代数 P_n の構造を決定しよう．ここで，$\{u_n\}$ は，次の関係

$u_n^2=1$，$u_nu_m=(-1)^{a(n-m)}u_mu_n$ for $n,m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，

$d=\max\{i\mid a(i)\neq 0\}<+\infty$ を満足していると仮定する．

$$A(n)=\begin{pmatrix} a(0) & a(1) & \cdots & a(n)\\ a(1) & a(0) & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & a(1)\\ a(n) & \cdots & a(1) & a(0)\end{pmatrix},\ \text{i.e. } (A(n))_{i,j}=a(i-j)$$

と置く．

補題 1.1. $\dim(\mathrm{Center}\,P_n)=2^{\dim\mathrm{Ker}A(n)}$.

（証明）

Fourier展開を考えることにより，Center P_n は，Center P_n

に属する $u_0^{x(0)} u_1^{x(1)} \cdots u_n^{x(n)}$ の形の元により、生成されること

が出る。一方、$u_0^{x(0)} u_1^{x(1)} \cdots u_n^{x(n)} \in \text{center } P_n$

$$\iff \sum_{k=0}^{n} a(i-k)x(k)=0 \quad \text{for } 0 \leqq i \leqq n.$$

$$\iff A(n)x=0 \quad \text{over the finite field } F_2=\{0,1\}$$

ここで、$x={}^t(x(0),\cdots,x(n))$, $x(i)\in F_2$, $i=0,1,2,\cdots$.

よって、$\text{Center } P_n$ の中の要素 $u_0^{x(0)} u_1^{x(1)} \cdots u_n^{x(n)}$ の数は、

方程式 $A(n)x=0$ の解 x の数に等しい。よって、

$\dim(\text{Center } P_n)$ は、方程式 $A(n)x=0$ (F_2上) の解の

個数である。このように、$\dim(\text{Center } P_n)=2^{\dim \operatorname{Ker} A(n)}$

Q.E.D.

<u>命題1.2.</u> C^*代数 P_n は、$M_{2^k}(\mathbb{C})\otimes\mathbb{C}^{2^\ell}$ (for $\exists k,\ell\geqq 0$) と同型である。

<u>証明</u>. これを、n に関する帰納法により証明する。

$P_n \cong M_{2^k}(\mathbb{C})\otimes\mathbb{C}^{2^\ell}$ ($\exists k,\ell\geqq 0$) と仮定する。α_{n+1} を、

P_n の automorphism で、$\alpha_{n+1}=\operatorname{Ad} u_{n+1}$ とする。このとき、

$P_{n+1} \cong P_n \rtimes_{\alpha_{n+1}} \mathbb{Z}_2$.

$$E \underset{\text{put}}{=} \{\text{central minimal projection } e\in P_n \mid \alpha_{n+1}(e)=e\}.$$

$e_0=\sum_{e\in E} e$ と置き、$s=\#E$ とする。このとき、$0\leqq s\leqq 2^\ell$.

この projection e_0 を用いて，$P_n = P_n e_0 \oplus P_n e_0^{\perp}$.

$$P_n \rtimes_{\alpha_{n+1}} Z_2 = (P_n e_0 \oplus P_n e_0^{\perp}) \rtimes_{\alpha_{n+1}} Z_2 = (P_n e_0 \rtimes_{\alpha_{n+1}} Z_2) \oplus (P_n e_0^{\perp} \rtimes_{\alpha_{n+1}} Z_2).$$

このとき，α_{n+1} は，$P_n e_0$ で inner であるので，

$$P_n e_0 \rtimes_{\alpha_{n+1}} Z_2 \cong P_n e_0 \otimes \mathbb{C}^2.$$

もし minimal central projection $f \notin E$ ならば，このとき，
minimal central projection $\alpha(f) \notin E$ でかつ，$f \neq \alpha(f)$.
よって，$P_n e_0^{\perp} = \sum_i \oplus (P_n f_i \oplus P_n \alpha_{n+1}(f_i))$ と分解される．
故に，

$$P_n e_0^{\perp} \rtimes_{\alpha_{n+1}} Z_2 = \sum_i (P_n f_i \oplus P_n \alpha_{n+1}(f_i)) \rtimes_{\alpha_{n+1}} Z_2.$$ 仮定より，

$P_n f_i \cong P_n \alpha_{n+1}(f_i) \cong M_{2^k}(\mathbb{C})$ なので，

$$(P_n f_i \oplus P_n \alpha_{n+1}(f_i)) \rtimes_{\alpha_{n+1}} Z_2 \cong M_{2^{k+1}}(\mathbb{C}).$$

だから，$\dim(\text{center } P_{n+1}) = 2s + \dfrac{(2^{\ell} - s)}{2}$.　このように，
$2^{\ell-1} \leqq \dim(\text{center } P_{n+1}) \leqq 2^{\ell+1}$.　補題1 によって，
$\dim(\text{center } P_{n+1}) = 2^m$ for ${}^{\exists} m \in \mathbb{N}$.

このように，$\dim(\text{Center } P_{n+1}) = 2^{\ell-1}, 2^{\ell}, 2^{\ell+1}$.　ところが，
$\dim(\text{center } P_{n+1}) = 2^{\ell}$ は，起こらない．　もし，起こるとすると，　$2^{\ell} = 2s + \dfrac{2^{\ell} - s}{2}$ を得る．　このとき，

$3s = 2^{\ell}$. これは，矛盾である．このように，
$\dim(\text{center } P_{n+1}) = 2^{\ell\pm1}$. だから，もし $\dim(\text{center } P_{n+1}) = 2^{\ell-1}$ とすると，上の議論により，

$$P_{n+1} \cong M_{2^{k+1}}(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}^{2^{\ell-1}} \quad (\text{これは，} s=0 \text{ の時}).$$

一方，$\dim(\text{center } P_{n+1}) = 2^{\ell+1}$ のとき，

$$P_{n+1} \cong M_{2^{k}}(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}^{2^{\ell+1}} \quad (\text{これは，} s=2^{\ell} \text{ の時}).$$

よって，n に関する帰納法によって，命題の主張を得る．

Q.E.D.

定理1.3.
$\{\dim(\text{center } P_n)\}_{n\geq 0}$ は，周期列である．

この定理1.3.を示すのに，いくつかの結果を準備しよう．
$d = \max\{i \mid a(i) \neq 0\}$ とおく．無限次元行列 X_d，$I_{k,\ell}(c)$ と，$d\times 2d$ 行列 Y_d を次で定義しよう．

$$(X_d)_{i,j} = \begin{cases} a(i-j) & (|i-j| \leqq d \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{他の } (i,j) \in \mathbb{N}^2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$(I_{k,\ell}(c))_{i,j} = \begin{cases} c & ((i,j) = (k,\ell) \text{ のとき}) \\ 1 & (i=j \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{他の } (i,j) \in \mathbb{N}^2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$(Y_d)_{i,j} = (X_d)_{i,j} \quad \text{for } 1 \leq i \leq d,\ 1 \leq j \leq 2d.$$

(ただし，$(\cdot)_{i,j}$ は，与えられた行列の (i,j) 成分を表わす．)

帰納的に，無限次元行列 $\{X_m\}_{m \geq d}$ と $d \times 2d$-行列 $\{Y_m\}_{m \geq d}$ で，次の関係をもつものを構成しよう．

$$X_{m+1} = I_{1,m+1}\big((X_m)_{1,m+1-d}\big) \times I_{2,m+1}\big((X_m)_{2,m+1-d}\big) \times \cdots \times I_{d,m+1}\big((X_m)_{d,m+1-d}\big) \cdot X_m,$$

$$(Y_{m+1})_{i,j} = (X_{m+1})_{i,j+m-d} \quad \text{for all } m > d.$$

<u>補題1.4.</u> 上の列 $\{Y_m\}_{m>d}$ は，周期をもつ．

<u>証明.</u>

最初に，その行列 X_m は次の形であることに注意する．

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \overbrace{\qquad\qquad}^{m-d} & \overbrace{\qquad\qquad}^{2d} & \qquad\qquad \end{array} \\
d\left\{\left[\begin{array}{c|c|c}
0 & Y_m & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \end{matrix} \\
\hline
\begin{matrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \end{matrix} & 0 \cdots \\
\hline
 & \begin{matrix} 1 & \\ & \ddots \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & \\ & 0 \end{matrix}
\end{array}\right]\right.
\end{array}
$$

故に，行列の成分について次の関係を得る。

$$\begin{cases} (Y_{m+1})_{i,j} = (Y_m)_{i,j+1} + (Y_m)_{i,1}\,a(d-j) & (1 \leqq j < 2n,\ 1 \leqq i \leqq d \text{ のとき}) \\ (Y_{m+1})_{i,2d} = (Y_m)_{i,1} & (1 \leqq i \leqq d \text{ のとき}) \end{cases}$$

これらの関係により，$Y_{m+1} = Y_m T$ for $m > d$，

ここで，Tは，次の形の $2d \times 2d$ 行列である。

$$\begin{pmatrix} a(d-1) & \cdots & a(0) & \cdots & a(d-1) & 1 \\ 1 & & & & & \\ & 1 & & & O & \\ & & \ddots & & & \\ & O & & & & \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tは，有限群 $GL(2d, \mathbb{Z}_2)$ に属しているので，Tは周期をもつ。このように，その列 $\{Y_m\}$ は，周期をもつ。

Q.E.D.

（注意）Tは可逆なので，$1 \leqq m \leqq d$ に対して，行列Y_mを，$Y_m = Y_d T^{-d+m}$ で，定義出来る。このとき，その列 $\{Y_n\}_{n \geqq 1}$ は周期をもつ。

この注意により，定理3を，以下示そう。

4.3

$m \times m$ 行列 A_m を，次で定義する．

$$(A_m)_{i,j} = \begin{cases} a(i-j) & (|i-j| \leqq d \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{その他のとき}) \end{cases}.$$

更に，$d \times d$ 行列 B_m を，次で定義する．

$$(B_m)_{i,j} = (Y_m)_{i,j}, \quad 1 \leqq i \leqq d,\ 1 \leqq j \leqq d.$$

$\{Y_m\}$ が周期をもつので，$\dim \mathrm{Ker}(A_m) = \dim \mathrm{Ker}(B_m)$，を示せば十分である．$m \geqq d$ の場合については，

$$\left((X_m)_{i,j}\right)_{1 \leqq i,j \leqq m} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & B_m \\ \hline \begin{matrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ O & & 1 \end{matrix} & * \end{array}\right) \text{ なので，}$$

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{Ker}(A_m) &= \dim \mathrm{Ker}\left(\left((X_m)_{i,j}\right);\ 1 \leqq i,j \leqq m\right) \\ &= \dim \mathrm{Ker}(B_m). \end{aligned}$$

$m < d$ の場合について，B_m は次の形をもつ．

$$B_m = \left(\begin{array}{c|c} O & A_m \\ \hline \begin{matrix} a(d) & a(d-1) & \cdots & a(m+1) \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a(d-1) \\ O & & & a(d) \end{matrix} & 0 \end{array}\right).$$

よって，$\dim \mathrm{Ker}(A_m) = \dim \mathrm{Ker}(B_m)$．だから，証明が終わる．

Q.E.D.

注意．

行列 T の minimal polynomial は，次で与えられる．

$$f_T(x) = a(d)x^{2d} + a(d-1)x^{2d-1} + \cdots + a(0)x^d + a(1)x^{d-1} + \cdots + a(d).$$

この多項式を用いて，$q = \min\{m \geqq 0 \,;\, T^m = I\}$ を計算出来る．もし p を，列 $\{\dim(\mathrm{center}\, P_n)\}_{n \geqq 0}$ の周期とすると，このとき，p は q の約数である．

以下に，signature sequence は違うが，各レベルの相対可換子代数が同型となる例を与えよう．

例1．

$n=4$．$a(0)=0$, $a(1)=0$, $a(2)=1$, $a(3)=0$, $a(4)=1$.

$a(0)=0$, $a(1)=0$, $a(2)=1$, $a(3)=1$, $a(4)=1$.

$p=q=12$.

周期列　1, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 0

例2．

$n=5$．$a(0)=0$, $a(1)=1$, $a(2)=0$, $a(3)=1$, $a(4)=0$, $a(5)=1$.

$a(0)=0$, $a(1)=1$, $a(2)=1$, $a(3)=0$, $a(4)=1$, $a(5)=1$.

$p=q=12$.

周期列　$1,0,1,2,3,4,5,4,3,2,1,0$.

例3.

$n=6$.

$a(0)=0, a(1)=1, a(2)=0, a(3)=1, a(4)=0, a(5)=1, a(6)=1$.

$a(0)=0, a(1)=1, a(2)=1, a(3)=0, a(4)=1, a(5)=1, a(6)=1$

$p=q=24$

周期列　$1,0,1,2,3,4,3,2,1,0,1,0,$
$1,2,3,4,5,6,5,4,3,2,1,0$.

§2. 本質的に周期的な signature sequence

以下では、R 上の binary shifts σ で、$C_K(\sigma)$ がすべての K について、scalars になる場合を考えよう。

定義2.1. a を non-periodic signature sequence on $\mathbb{Z}$ とする。その列 a が、essentially periodic（本質的に周期的）というのは、$\exists$ positive integers k, p で、$\forall n \geqq k$ について、$a(n+p)=a(n)$ となるものが存在するときをいう。

定理2.2.

a を non-periodic signature sequence として、σ_a を、Hyperfinite II_1-factor R 上の、a に associate した binary shift とする。このとき、a が essentially periodic $\Longleftrightarrow$ $\exists$ positive integer r で、$\sigma_a^r(R)' \cap R \neq \mathbb{C}I$ となるものが

存在する。

<u>証明</u>. 最初に, $C_r(\sigma_a) \neq \mathbb{C}I$ となる positive integer r が存在すると仮定する。このとき, $\exists x (\neq 1) \in G = \coprod_{i=0}^{\infty} G_i$, $G_i \cong \mathbb{Z}_2$ で, $m_a(x, e_n) = m_a(e_n, x)$ for $n \geqq r$, となるものが存在する。この x は, $x = \sum_{i=0}^{d} x(i) e_i$ と書ける。ここで, $d = \max\{i ; x(i) \neq 0\}$, $x(i) \in \{0, 1\}$. このとき,

$$\sum_{i=0}^{d} a(n-i)x(i) = 0 \quad \text{for } n \geqq r,$$ が成立する.

更に, $n \geqq r$ に対して,

$a_0(n) = a(n-d)$, $a_1(n) = a(n-d+1)$, $\cdots$, $a_{d-\ell-1}(n) = a(n-\ell-1)$

とおく. これらの $a_i(n)$ $(0 \leqq i \leqq d-\ell-1)$ を使って,

$\overrightarrow{a_n} = (a_0(n), \cdots, a_{d-\ell-1}(n))^t$ とおく. 又, $(d-\ell) \times (d-\ell)$ 行列 A を, 次で定義する.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & & \ddots & & O \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & O & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \\ x(d) & \cdots & \cdots & x(\ell+2) & x(\ell+1) \end{pmatrix}.$$

$\{0,1\}^{d-\ell}$ は, 有限集合なので, positive integer p と non negative integer k が存在して,

$$A^p(A^k \overrightarrow{a_r}) = A^k \overrightarrow{a_r}$$ が成り立つ.

A の巾をこの等式の両辺に作用させることにより, 次を得る.

$$A^p(\overrightarrow{a_m}) = \overrightarrow{a_m} \quad \text{for} \quad m \geqq r+k.$$

よって，$\overrightarrow{a_m}$ の定義により，

$$a(m+p)=a(m) \quad \text{for} \quad m \geqq r+k-d.$$

このように，a は，essentially periodic である．

次に，この定理の必要性を示そう．

a が essentially periodic と仮定しよう．よって，$\exists$ positive integers k, p で，$\forall n \geqq k$ について，$a(n+p)=a(n)$ が成り立つ．

次の2つの場合が起きる．

(<u>場合1</u>). $a(k)+a(k+1)+\cdots+a(k+p-1)=0$. v を次で置く．

$v = u_0 u_1 \cdots u_{p-1} (\in \mathbb{C}I)$. このとき，$v \in \sigma_a^{k+p-1}(R)' \cap R$.

(<u>場合2</u>) $a(k)+a(k+1)+\cdots+a(k+p-1)=1$.

$v = u_0 u_1 \cdots u_{p-1} u_p u_{p+1} \cdots u_{2p-1} (\in \mathbb{C}I)$ とおく．

このとき，$v \in \sigma_a^{k+2p-1}(R)' \cap R$. これは，次より出る．

$a(k+i)=a(k+i+p)$ for $0 \leqq i \leqq p-1$ より，

$\sum_{i=0}^{2p-1} a(k+i)=0$. よって，定理が示せたことになる．

<u>Q.E.D.</u>

§3. <u>整数 index をもつ Price 型 shift.</u>

ここでは，[7] で示した結果を index n の場合について行なう．$n \geqq 2$ なる整数，$G = \coprod_{i=0}^{\infty} G_i$, $G_i \cong \mathbb{Z}_n$ とする．

σをG上のcanonical shiftとする. $a=(a(i))_{i\in\mathbb{Z}}$を, $a(i)\in\mathbb{Z}_n=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $a(0)=0$で, $a(-i)=-a(i)$, $\forall i\in\mathbb{Z}$なるものとする.
この列aに対して, 次を仮定する([1], [12]).

(*) nを割るすべての素数pに対して, 上の列$a=(a(i))$は, mod pで, 周期的でない.

$\gamma=e^{\frac{2\pi i}{n}}$とおく. 上の列$a=(a(i))$を使って, multiplier m_aを, 次で定義する.

$$m_a(x,y)=\gamma^{\sum_{i>j}a(i-j)x(i)y(j)} \quad \text{for } x=(x(i)),\ y=(y(j))\in G.$$

このとき, $m=m_a$は, σを保存するので, σは, $R_m(G)$上のshift σ_mをinduceする. 他方, BuresとYin [1]は, 次を示した.

定理([1]). 次の(1), (2), (3)は同値である.

(1) その列$a=(a(i))$は, (*)をみたす.

(2) $R_m(G)$は, factorである.

(3) $\sigma_m(R_m(G))'\cap R_m(G)=\mathbb{C}I$.

定義3.1.
hyperfinite II_1 factor Rのshift αが, Powers type shifts with index nというのは, $G=\prod_{i=0}^{\infty}G_i$, $G_i\cong\mathbb{Z}_n$として, その上のcanonical shift σを使って, (*)をみたす$a=(a(i))$より作られる$R_{m_a}(G)$上のshift σ_{m_a}のことである.

定義3.2. $X_\ell=\prod_{i=0}^{\infty}G_i^{(\ell)}$, $G_i^{(\ell)}\cong\mathbb{Z}_n$と, (*)をみたすaを取る.

多項式の列 $p=(p_1,p_2,\cdots)$ で、$p_\ell(t)=c_{\ell,0}+c_{\ell,1}t+\cdots+c_{\ell,k(\ell)}t^{k(\ell)}$ で、$c_{\ell,0}=c_{\ell,k(\ell)}=1$ for $\ell=1,2,\cdots$ を取る。
$\Phi_{p_\ell}: X_\ell \longrightarrow X_{\ell+1}$ を多項式 p_ℓ による group injection とする。

(i.e.)

$$\begin{tikzcd} X_\ell \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\Phi_{p_\ell}"] & \mathbb{Z}_2[t] \arrow[d, "\psi"] \\ X_{\ell+1} \arrow[r, "\gamma"'] & \dfrac{\mathbb{Z}_2[t]}{p_\ell(t)} \end{tikzcd}$$

$$\theta((x(i)))=\sum_i x(i)t^i$$

$$\psi(f(t))=\frac{f(t)p_\ell(t)}{p_\ell(t)}$$

$$\gamma((y(i)))=\frac{\sum y(i)t^i}{p_\ell(t)}.$$

このとき、$(*)$をみたす列 a_ℓ で、それにより induce される multipliers m_{a_ℓ} $(\ell=1,2,\cdots)$ が、$m_{a_{\ell+1}}(\Phi_{p_\ell}(x),\Phi_{p_\ell}(y))=m_{a_\ell}(x,y)$ $(x,y\in X_\ell)$, $a_1=a$ を満足するものが存在する。
$X_{[p]}=\varinjlim(X_\ell,\Phi_{p_\ell})$ とおき、$X_{[p]}$ 上の multiplier $m_{[a,p]}$ を $m_{[a,p]}(x,y)=m_{a_\ell}(x,y)$ $(x,y\in X_\ell$ のとき$)$ とおく。このとき、$R_{m_{[a,p]}}(X_{[p]})$ は、hyperfinite II_1-factor であり、$X_{[p]}$ 上の canonical group endomorphism $\sigma_{[p]}$ を考えて、$R_{m_{[a,p]}}(X_{[p]})$ 上の shift $\sigma_{[a,p]}$ を induce させる。(ここで、canonical group endomorphism は、$\sigma_t\left(\frac{f(t)}{p(t)}\right)=\frac{t\,f(t)}{p(t)}$ の作用により induce される。) 我々は、このとき、この shift 達を Price型の shift という。

以下、$\sigma_{[a,p]}=\sigma$, $X_{[p]}=X$ とおく。

命題 3.3. Price 型の shift σ に対して, $\sigma(R)' \cap R = \mathbb{C}I$.

証明. $x\ (\neq \lambda I) \in \sigma(R)' \cap R$ が存在したと仮定する.
$\{\delta_g ; g \in X\}$ を, canonical orthonormal basis of $\ell^2(X)$ とする.
このとき, $x\delta_e = \sum_{g\in G} c_g \delta_g$, $\sum_{g\in G} |c_g|^2 < +\infty$. $\forall h \in \sigma(X)$ に対して, $(\lambda_m(h)x)\delta_e = \sum_{g\in G} c_g m(h,g)\delta_{gh}$ で, $(x\lambda_m(h))\delta_e = x(\rho_m(h^{-1})\delta_e) = \sum_{g\in G} c_g m(g,h)\delta_{gh}$. (ここで, $\rho_m(g)(\delta_h) = m(h,g^{-1})\delta_{hg}$ for $g,h \in X$). $\lambda_m(h)x = x\lambda_m(h)$ なので, $c_g m(h,g) = c_g m(g,h)$ が出る. このように, もし $c_g \neq 0$ ならば, $m(h,g) = m(g,h)$ for $\forall h \in \sigma(X)$. x は, スカラーでないので, $\exists g\ (\neq 1) \in X$ で, $\lambda_m(g) \in \sigma(R)' \cap R$ となるものが存在する. 他方, $X = X_{[p]} = \varinjlim X_p$ なので, $\exists \ell$ で, $g \in X_\ell$ なるものが存在する.
他方, $\lambda_m(g)|_{\ell^2(X_\ell)} = \lambda_{m_\ell}(g)$. 明らかに, $\lambda_{m_\ell}(g)$ は, スカラーでなく, $\lambda_{m_\ell}(g) \in \sigma(R_{m_\ell}(X_\ell))' \cap R_{m_\ell}(X_\ell)$ である. ところが, 上の Bures と Yin の定理により, $\sigma(R_{m_\ell}(X_\ell))' \cap R_{m_\ell}(X_\ell) = \mathbb{C}I$. これは, 矛盾. よって, $\sigma(R)' \cap R = \mathbb{C}I$.

Q.E.D.

命題 3.4. ([1]).

G を可算離散可換群とする. m を nondegenerate な G の multiplier として, σ を m を保存する G の shift とする.
(i.e. $\sigma : G \longrightarrow G$ (injective homomorphism) で, $\bigcap_{k=1}^{\infty} \sigma^k(G) = \{1\}$ のとき, σ を shift という. $m(\sigma(x), \sigma(y)) = m(x,y)$ for $\forall x, y \in G$

のとき，σ は m を保存するという．）σ_m を σ により induce された hyperfinite II_1 factor $R_m(G)$ の shift とする．

$N(\sigma_m)=\{u\in R^{\text{unitary}};\ u\sigma_m^k(R)u^*=\sigma_m^k(R),\ k=1,2,\cdots\}$ とする．

このとき，$N(\sigma_m)/\mathbb{T}\cong G \iff \sigma_m(R)'\cap R=\mathbb{C}$．

命題3.5. ゼロでない定数項をもつ多項式の列，$p=(p_i)$，$q=(q_i)$ と，2つの $(*)$ 条件をみたす列 a, b を取る．もし2つの Price 型の shifts $\sigma_{[a,p]}, \sigma_{[b,q]}$ が共役ならば，$(\sigma_{[p]}, X_{[p]})$，$(\sigma_{[q]}, X_{[q]})$ は，共役である．（ただし，$\sigma_{[p]}$ は，$\sigma_{[a,p]}$ により induce された $X_{[p]}$ 上の shift である．）

次に，可算な既約多項式の列 (p_k) $(p_k(t)\neq t)$ を取る．$(p_k\neq p_{k'})$

$a\in\prod_{i=1}^{\infty}Z_2$ とする．次の集合 X^a を取る．

$$X^a=\left\{\frac{g(t)}{f(t)};\ g(t)\in Z_n[t],\ f(t)\text{ は，もし } f(t)=p_1(t)^{k_1}\cdots p_n(t)^{k_n},\ k_i\neq 0 \text{ ならば，} a(i)\neq 0 \text{ となるもの．}\right\}$$

σ_t を X^a 上で考えて，これを σ^a と書く

補題3.6. $a, b\in\prod_{i=1}^{\infty}Z_2$ とする．このとき，$a=b \iff (\sigma^a, X^a)$ と (σ^b, X^b) は共役である．

命題3.3，命題3.4，命題3.5，補題3.6 を使う事により，次の定理を得る．

定理3.7. index n をもつ Price 型 shift が非可算個，共役性を除いて存在し，これらは，Powers 型 shift と共役でない．

文献

[1] D. Bures and H.S. Yin, Shifts on the hyperfinite II_1-factor. preprint, 1987.

[2] ———, Outer conjugacy of shifts on the hyperfinite II_1 factor. preprint, 1988.

[3] M. Choda, Shifts on the hyperfinite II_1-factor, J. Operator Theory, 17(1987), 223–235.

[4] M. Enomoto and Y. Watatani, Powers' binary shifts on the hyperfinite factor of type II_1, Proc. Amer. Math. Soc., to appear.

[5] ———, A solution of Powers' problem on outer conjugacy of binary shifts, preprint 1987.

[6] M. Enomoto, M. Choda and Y. Watatani, Generalized Powers' binary shifts on the hyperfinite II_1 factor, Math. Japon., to appear.

[7] ———, Uncountably many non-binary shifts on the hyperfinite II_1-factor, preprint 1987.

[8] V.F.R. Jones, Index for subfactors, Invent. Math. 72(1983), 1–25.

[9] A. Ocneanu, Quantized groups, string algebras and Galois theory for algebras, preprint 1988.

[10] R.T. Powers, An index theory for semigroups of *-endomorphisms of B(H) and type II_1 factors, Can. J. Math., 40 (1988) 86-114.

[11] G. Price, Shifts on type II_1 factors, Can. J. Math., 39(1987), 492-511.

[12] ——, Shifts of integer index on the hyperfinite II_1 factor, Pac. J. Math., 132(1988), 379-390.

(注) §1と§2の結果は，阪大基礎工の渚，吉田両氏，大阪教育大の綿谷氏との共同研究であることを，断わっておきます.